Μελέτη κίνησης μέσου χορδής επί κύκλου με το γεωμετρικό λογισμικό Sketchpad

Ιωάννης Πλατάρος,

ηλ. Ταχ. plataros@gmail.com

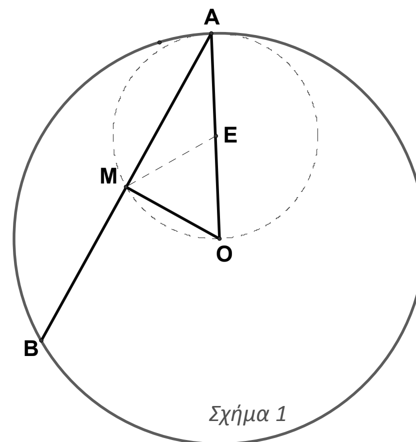
Περίληψη: Το Sketchpad, είναι ένα γεωμετρικό δυναμικό λογισμικό σχεδιασμένο κυρίως για Ευκλείδεια θεώρηση της Γεωμετρίας. Όμως μπορεί να αναδείξει με ενδιαφέροντα τρόπο, δηλ. με κίνηση, εποπτεία, δυναμική σχεδίαση και αισθητικό αποτέλεσμα, θέματα Αναλυτικής Γεωμετρίας, τα οποία μπορούν να ενταχθούν στο Αναλυτικό πρόγραμμα Γεωμετρίας της Β΄ Λυκείου, ενοποιώντας Τριγωνομετρία, παραμετρικές δύο διαστάσεων, και Κινηματική στην Φυσική, με την Αναλυτική Γεωμετρία, αφού η παραμετρική μεταβλητή t , προκύπτει φυσικά, ως χρόνος.

Summary: Sketchpad, is a dynamic geometric software designed especially for Euclidean consideration of Geometry. However, it can bring in an interesting way (movement of geometric objects, supervision, experimentation, dynamic design, aesthetic result) subjects of Analytic Geometry, which can be integrated in the curriculum of Geometry of second High school class, unifying trigonometry, two-dimensional parametric equations, kinematics in physics and Analytic Geometry, since the parameter t of the equations can be interpreted in a natural way, as time.

Εισαγωγή: Η κίνηση στην Γεωμετρία ενυπήρχε από την γένεσή της (λ.χ. στοχαστική κίνηση για απόδειξη με επίθεση, γεωμετρικοί τόποι, Μηχανική μέθοδος του Αρχιμήδους [8]). Όμως δεν υπήρχαν τα κατάλληλα εργαλεία που έχουμε ευρέως την τελευταία εικοσαετία και ιδίως η ευκολία πρόσβασης όλων σ΄ αυτά. Τα αναλυτικά προγράμματα, ανέκαθεν δύσκαμπτα, δεν ακολουθούν την πειραματική λογική των προηγμένων εργαλείων, ιδία στην Γεωμετρία όπου κυρίως υπάρχει η εποπτεία και τα

δυναμικά εκπαιδευτικά λογισμικά μπορούν να αναδείξουν πτυχές που δεν μπορούσαν να προσεγγιστούν ποτέ πιο εύκολα. Λόγου χάριν: Τέλειο σχήμα προσαρμοζόμενο πειραματικά κατά τις ανάγκες του παρατηρητή-μελετητή. Παντοειδείς μετρήσεις μεταβαλλόμενων γεωμετρικών μεγεθών και γραφική παράσταση δύο συμμεταβαλλομένων μεγεθών. Κίνηση σχήματος με πολλαπλούς τρόπους αναλόγως κατασκευής. Διαγραφή τροχιάς κινούμενου σημείου ή άλλου γεωμετρικού αντικειμένου. Σημείο επί κατασκευασμένου γ. τόπου για κατασκευή άλλων τόπων κ.ο.κ. Πώς αλλάζει ένας γ.τ όταν μεταβάλλονται τα λεγόμενα σταθερά στοιχεία του τόπου που κι αυτά υπόκεινται σε δυναμική μεταβολή από το εργαλείο. Ολοκληρωμένες διερευνήσεις ειδικών περιπτώσεων σε οριακές θέσεις του σχήματος. Στους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς, έχουμε δυνατότητες κατάδειξης για το πώς μεταβάλλεται –παραμορφώνεται στο επίπεδο ένα σχήμα που υφίσταται τον μετασχηματισμό με συνεχή μεταβολή στον χρόνο και ελεγχόμενη θέση από τον χρήστη. Κι αυτά είναι ορισμένες από τις δυνατότητες του λογισμικού. Με την μελέτη της κίνησης χορδής επί κύκλου, θα ξεκινήσουμε με μια άσκηση του Σχολικού βιβλίου της Β΄Λυκείου θα δούμε πώς μπορεί να προσεγγιστεί με Ευκλείδεια θεώρηση και με συγκριτική θεώρηση Αναλυτικής Γεωμετρίας, αλλά και με όρους κινητικής με επόμενο στάδιο της γενίκευσή της, εκμεταλλευόμενοι ορισμένες από τις δυνατότητες του λογισμικού, παράγοντας κάποια μαθηματικώς γόνιμα αποτελέσματα, αλλά και με αισθητική διάσταση, για τους μαθητές.

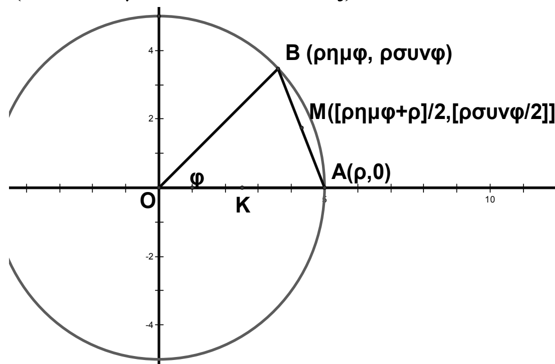
Πρόβλημα 1: *Το ένα άκρο χορδής κύκλου παραμένει σταθερό ενώ το άλλο κινείται επί του κύκλου. Να βρεθεί ο γ.τ. του μέσου της χορδής.*



Σχήμα 1

Με Ευκλείδεια θεώρηση έχουμε (Σχήμα 1) ότι αν Α το σταθερό σημείο, Β το κινούμενο, Μ το μέσον, τότε ΟΜ$\perp$ ΑΒ ως απόστημα του κύκλου και παρατηρούμε, ότι το μεταβλητό σημείο Μ, βλέπει το σταθερό θέσει μεγέθει ευθ. τμήμα ΟΑ υπό ορθή γωνία, άρα κείται επί κύκλου με κέντρο το μέσον Ε της ΟΑ και ακτίνα ΜΕ=ρ/2 , αφού η ΜΕ είναι διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου

επί της υποτείνουσας και ισούται με το μισό της. Και η μελέτη ολοκληρώνεται με την κατασκευή, απόδειξη και (ίσως) αντίστροφο του γ.τ. μια προσέγγιση όμως, που ουσιαστικά έχει καταργηθεί από την διδασκαλία στην πράξη κάποιες δεκαετίες [2]. Η άσκηση αυτή, είναι ισοδύναμη με το να φανταστούμε την ΑΒ, να κινείται γύρω από άξονα Κ≡ Α. Οπότε η ολιστική θεώρηση στο επίπεδο, είναι να εξετασθεί επί πλέον το τι γίνεται όταν Κ εσωτερικό του κύκλου (πάλι ο γ.τ. είναι κύκλος) και τι όταν Κ εξωτερικό σημείο του κύκλου (τόξο κύκλου). Με το λογισμικό Sketchpad, μπορούν να επιδειχθούν οι τρεις τόποι ως ένας, όπου ο άξονας περιστροφής Κ, μεταβαίνει από το εσωτερικό του κύκλου, στον κύκλο και έξω από τον κύκλο, καθώς μεταβάλλονται τα παλαιόθεν λεγόμενα «σταθερά στοιχεία» του τόπου.



Σχήμα 2

<u>Με θεώρηση αναλυτικής Γεωμετρίας</u> έχουμε:

Α ακίνητο, Β κινούμενο με σταθερή γραμμική ταχύτητα υ. Εκκινεί το Β από το Α.

Ισχύει υ=ωρ όπου ω η επίσης σταθερή γωνιακή του ταχύτητα, και $\omega=\dfrac{\varphi}{t}$ (1), όπου t, ο χρόνος μετάβασης από Α→Β. Ισχύει κατά τα γνωστά, ότι αφού Μ μέσον, οι συντεταγμένες του θα είναι $\mathrm{M}\left(\dfrac{\rho\sigma\upsilon\nu\varphi+\rho}{2},\dfrac{\rho\eta\mu\varphi}{2}\right)$ απ΄ όπου έχω την παραμετρική εξίσωση

$$\left\{\begin{aligned} \chi(t)&=\frac{\rho}{2}(\sigma\upsilon\nu t+1)\\ y(t)&=\frac{\rho}{2}\eta\mu t\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{aligned}\chi-\frac{\rho}{2}&=\frac{\rho}{2}\sigma\upsilon\nu t\\ y\quad&=\frac{\rho}{2}\eta\mu t\end{aligned}\right\}$$

Με ύψωση στο τετράγωνο και πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνω:

$$\left(\chi-\frac{\rho}{2}\right)^2+y^2=\frac{\rho^2}{4}(\eta\mu^2 t+\sigma\upsilon\nu^2 t)\Leftrightarrow\left(\chi-\frac{\rho}{2}\right)^2+\left(y-0\right)^2=\left(\frac{\rho}{2}\right)^2$$, απ΄ όπου έχω τον κύκλο Κ(ρ/2,0)

Οι άλλες δύο περιπτώσεις με Κ εσωτερικά του κύκλου και Κ εξωτερικά του κύκλου, δεν μπορούν να αντιμετωπιστούν εποπτικά με κίνηση των σημείων τομής με το λογισμικό, καθώς μια κίνηση σταθερής γωνιακής ταχύτητας άξονα περί το Κ, δεν ορίζει σταθερές ταχύτητες επί των σημείων της χορδής του κύκλου, και έτσι, προσεγγίζονται με «χειροκίνητη περιστροφή του άξονα περί το Κ. Παρεμφερής άσκηση στο διδακτικό βιβλίο [3] (§3.1 10 άσκηση Β΄ ομάδας) που είναι η περίπτωση με Κ εσωτερικό του κύκλου, αντιμετωπίζεται με ευκλείδεια προσέγγιση και όχι κινητική όπως κάναμε με το Κ σημείο του κύκλου. Βεβαίως να επισημάνουμε, ότι για να αναγνωριστεί ο κύκλος, λύσαμε και ένα παράπλευρο πρόβλημα μετατροπής των παραμετρικών εξισώσεων σε καρτεσιανές, δηλαδή απαλείψαμε το t από τις δύο εξισώσεις χ(t) και y(t) βρίσκοντας μία σχέση που συνδέει τα χ, y ανεξάρτητη του t . Εδώ ήταν εύκολο, συνήθως είναι δύσκολο και συχνά δεν μπορεί να επιτευχθεί χωρίς την χρήση αντιστρόφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων ή την καταφυγή σε πολικές συντεταγμένες που είναι όμως εκτός διδακτέας ύλης. Από την άλλη όμως, το λογισμικό μπορεί να πάρει την σκυτάλη από την Ευκλείδεια θεώρηση και να πάει παραπέρα, όπως στο επόμενο.

Πρόβλημα 2: *Να μελετηθεί η κίνηση του μέσου Μ της χορδής ΑΒ που ορίζουν δύο κινούμενα σημεία Α και Β, επί κύκλου με σταθερές ταχύτητες.*

Διακρίνω περιπτώσεις: α) κινούνται ομορρόπως και ισοταχώς : Κατά ανάλογο τρόπο με τα προηγούμενα σχηματίζουμε την εξίσωση του μέσου Μ, η οποία πρέπει να είναι $\mathrm{M}\left(\frac{\rho\sigma\upsilon\nu t+\rho\sigma\upsilon\nu(\mathrm{t}+\varphi_0)}{2},\frac{\rho\eta\mu t+\rho\eta\mu(\mathrm{t}+\varphi_0)}{2}\right)$,

όπου φ_0 η αρχική επίκεντρη γωνία που σχηματίζουν τα Α, Β (για t=0) Θέτοντας την εξίσωση με τις καρτεσιανές συντεταγμένες, έχω τις δύο παραμετρικές εξισώσεις:

$$\left\{\begin{array}{l} \chi(t)=\dfrac{\rho\sigma\upsilon\nu t+\rho\sigma\upsilon\nu(\mathrm{t}+\varphi_0)}{2} \\ y(t)=\dfrac{\rho\eta\mu t+\rho\eta\mu(\mathrm{t}+\varphi_0)}{2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2\chi(t)=\rho[\sigma\upsilon\nu t+\sigma\upsilon\nu(\mathrm{t}+\varphi_0)] \\ 2y(t)=\rho[\eta\mu t+\eta\mu(\mathrm{t}+\varphi_0)] \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

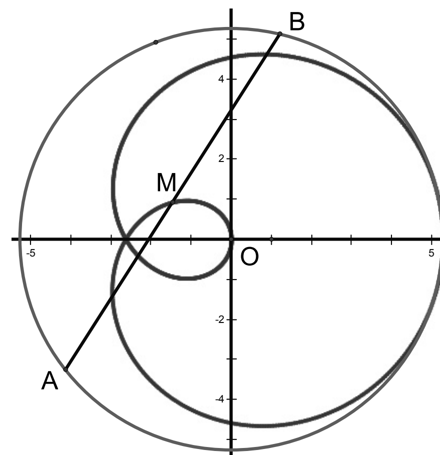
$$\left\{\begin{array}{l} \cancel{2}\chi(t)=\rho\cdot\cancel{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{2\omega t+\varphi_0}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\dfrac{\varphi_0}{2} \\ \cancel{2}y(t)=\rho\cdot\cancel{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{2\omega t+\varphi_0}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\dfrac{\varphi_0}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow (\ldots) \Rightarrow \chi^2+y^2=\left(\rho\sigma\upsilon\nu\dfrac{\varphi_0}{2}\right)^2$$

Δηλ. (όπως στο σχήμα 2) κύκλο (Ο, $|\rho\sigma\upsilon\nu(\varphi_0/2)|$) η οποία ακτίνα είναι το απόστημα της χορδής ΑΒ με τριγωνομετρικό υπολογισμό. Να σπεύσουμε να σημειώσουμε ότι η παρούσα προσέγγιση, υστερεί κατά πολύ ακόμα της Ευκλείδειας, που είναι πολύ πιο απλή, δηλ. σταθερό απόστημα, άρα κύκλος.

β) Κινούνται αντιρρόπως και ισοταχώς: Αναλογικά και εδώ αν δεχθούμε ως αρχική θέση $\mathrm{A}\equiv\mathrm{B}$ και για το αντίρροπο θεωρήσουμε ως διαγραφόμενη γωνία $-\varphi$, τότε θα έχουμε για το μέσον τις συντεταγμένες

$$\mathrm{M}\left(\frac{\rho\sigma\upsilon\nu\varphi+\rho\sigma\upsilon\nu(-\varphi)}{2},\frac{\rho\eta\mu\varphi+\rho\eta\mu(-\varphi)}{2}\right)\equiv\mathrm{M}(\rho\sigma\upsilon\nu\varphi,0)\equiv\mathrm{M}(\rho\sigma\upsilon\nu\omega\mathrm{t},0)$$

Δηλ. το Μ, διαγράφει την διάμετρο του κύκλου στον άξονα χχ΄. Εδώ η Ευκλείδεια θεώρηση αρχίζει να χάνει, καθώς μια ισοδύναμη διατύπωση αναλόγου προβλήματος είναι κίνηση ευθείας παραλλήλως προς εαυτόν, η οποία αποτέμνει χορδή από κύκλο και τι τροχιά διαγράφει το μέσον της χορδής.



Σχήμα 3

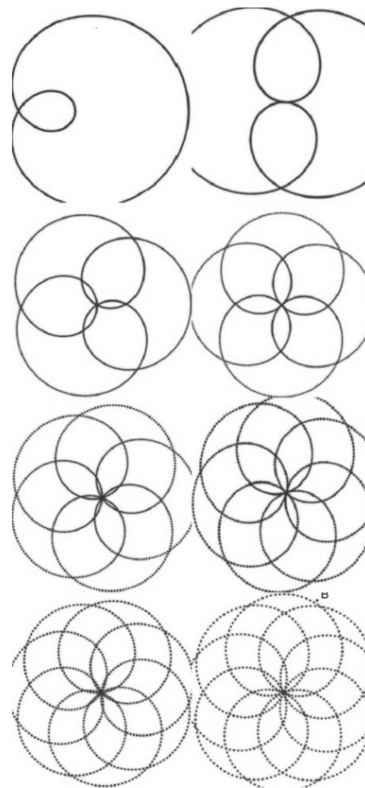
Γ) Ομορρόπως, το Α με διπλάσια ταχύτητα του Β. Επειδή κινούνται επί του ιδίου κύκλου, έχω στον ίδιο χρόνο t, διαγραφή γωνιών 2φ και φ για τα Α και Β αντιστοίχως, άρα $\omega_A=2\varphi/t$, $\omega_B=\varphi/t$, άρα $\omega=\omega_A=2\omega_B$ και αναλόγως τις συντεταγμένες για τα Α και Β ως εξής:

$$\mathrm{A}\left(\rho\sigma\upsilon\nu 2\varphi,\rho\eta\mu 2\varphi\right),\mathrm{B}\left(\rho\sigma\upsilon\nu\varphi,\rho\eta\mu\varphi\right)$$

Από όπου $M\left(\dfrac{\rho\sigma\upsilon\nu 2\varphi+\rho\sigma\upsilon\nu\varphi}{2},\dfrac{\rho\eta\mu 2\varphi+\rho\eta\mu\varphi}{2}\right)$ και τελικά τις παραμετρικές εξισώσεις ως προς t

$$\begin{Bmatrix} x(t)=\dfrac{\rho(\sigma\upsilon\nu 2\omega t+\sigma\upsilon\nu\omega t)}{2} \\ y(t)=\dfrac{\rho(\eta\mu 2\omega t+\eta\mu\omega t)}{2} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \dfrac{2\chi}{\rho}=\sigma\upsilon\nu 2\omega t+\sigma\upsilon\nu\omega t \\ \dfrac{2y}{\rho}=\eta\mu 2\omega t+\eta\mu\omega t \end{Bmatrix}$$

Αν τώρα προσπαθήσω να απαλείψω το t μεταξύ των δύο παραμετρικών εξισώσεων, θέτοντας και για περεταίρω απλοποίηση ρ=1 και ωt=α, έχω το σύστημα :



$$\begin{Bmatrix} 2\chi=\sigma\upsilon\nu 2\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha \quad (1) \\ 2y=\eta\mu 2\alpha+\eta\mu\alpha \end{Bmatrix} \quad (*)$$

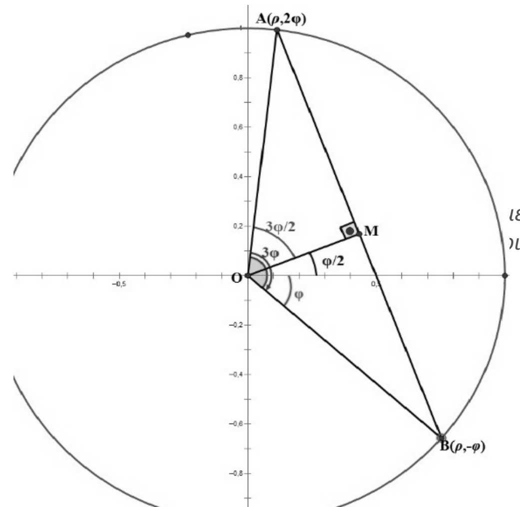
Με ύψωση στο τετράγωνο κάθε μιας και πρόσθεση κατά μέλη, λαμβάνω:

$$4\chi^2+4y^2=2+2\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu 2\alpha+2\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu 2\alpha \Leftrightarrow$$

$$2\chi^2+2y^2=1+\sigma\upsilon\nu\alpha \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha=2\chi^2+2y^2-1 \quad (2)$$

Θεωρώ την γνωστή τριγωνομετρική ταυτότητα $\sigma\upsilon\nu 2\alpha=2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1$ (3)

Επιλύω την (1) ως προς συν2α, αντικαθιστώ στην (3) και εν συνεχεία την (2) στην (3) οπότε θα λάβω μετά τις πράξεις $4(\mathrm{x}^2+y^2)^2-3(\mathrm{x}^2+y^2)=\mathrm{x}$ (4) που είναι η πεπλεγμένη έκφραση του συστήματος (*) σε καρτεσιανές συντεταγμένες. Βρίσκοντας την (4) έχω λύσει μια αλγεβρική άσκηση απαλοιφής που απαιτεί κάποιες δεξιότητες, οποίες όμως δεν επαρκούν για την γενική περίπτωση, καθώς οι τριγωνομετρικοί τύποι που απαιτούνται πέραν της απλής σχέσεως ταχυτήτων 1:2 γίνονται διαρκώς πολυπλοκότεροι ενώ για την γενική περίπτωση (λ.χ. άρρητη σχέση) δεν υφίστανται καν τύποι. Η καταφυγή σε αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις δεν δίνει «κομψούς» τύπους σαν την (4) έστω και σε πεπλεγμένη μορφή. Επίσης η (4) δεν φαίνεται να ανήκει σε κάποια θεμελιώδη γνωστή κατηγορία – οικογένεια (λ.χ. κωνικές τομές) ώστε να μπορεί να ταξινομηθεί. Γεννάται τότε το ερώτημα τι κερδίζουμε πέρα από έναν καλό αλγεβρικό χειρισμό; Η απάντηση είναι μάλλον «τίποτα περισσότερο» και σίγουρα όχι κάτι καλύτερο, απλούστερο από την (*) η οποία κι αυτή ως αναφορικό νόημα δεν λέει κάτι παραπάνω. Όταν όμως πάμε στην εικόνα –γραφική παράσταση, τα πράγματα αλλάζουν άρδην αφού φαίνεται η διαγραφή μιας διπλής Αρχιμήδειας έλικας, [4] κάτι σαν καρδιοειδές με βρόγχο [5] ή ειδική περίπτωση καμπύλης «Limacon» [6]



Σχήμα 5

Δ) Αντιρρόπως, το Α με διπλάσια ταχύτητα του Β , όπου επειδή κινούνται επί ίσων ακτίνων, έχω για τον ίδιο χρόνο t, διαγραφή γωνιών 2φ και -φ για τα Α και Β αντιστοίχως, αναλόγως εργαζόμενος με τις συντεταγμένες για τα Α και Β, έχω $\mathrm{A}(\rho\sigma\upsilon\nu 2\varphi, \rho\eta\mu 2\varphi)$,$\mathrm{B}(\rho\sigma\upsilon\nu(-\varphi), \rho\eta\mu(-\varphi))$ απ΄ όπου $\mathrm{M}\left(\frac{\rho\sigma\upsilon\nu 2\varphi+\rho\sigma\upsilon\nu\varphi}{2}, \frac{\rho\eta\mu 2\varphi-\rho\eta\mu\varphi}{2}\right)$ με παραμετρικές εξισώσεις

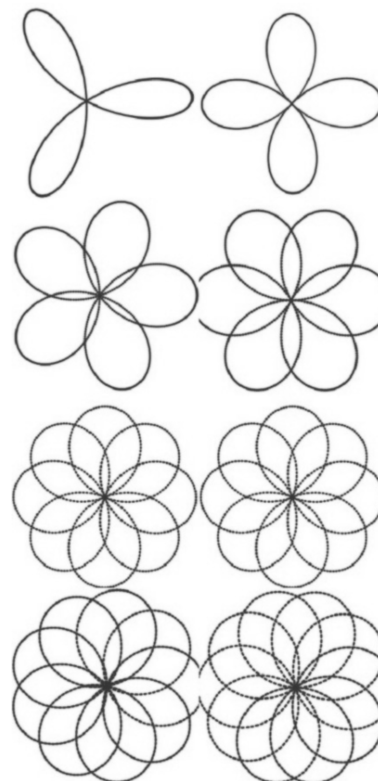
$$\begin{cases} 2\chi = \sigma\upsilon\nu 2\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha \quad (3) \\ 2y = \eta\mu 2\alpha - \eta\mu\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\chi = 2\sigma\upsilon\nu\dfrac{3\alpha}{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{\alpha}{2} \quad (3) \\ 2y = 2\sigma\upsilon\nu\dfrac{3\alpha}{2}\eta\mu\dfrac{\alpha}{2} \end{cases} (**)$$

απ΄ όπου με διαίρεση κατά μέλη έχω

$$\frac{y}{x} = \varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \frac{y^2}{x^2} = \varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha} \Rightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \quad (5)$$

Η (3) ισοδυναμεί με $2\chi=2\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha-1$ και λόγω (5), τελικά μετά από πράξεις, θα δώσει την καρτεσιανή εξίσωση $\boxed{(x^2+y^2)^2 = x^3-3xy^2}$ (6) που είναι μια ειδική περίπτωση τεταρτοβάθμιας επίπεδης διμεταβλητής εξίσωσης που μοιάζει με *τρίφυλλο ήμερου ραδικιού* (πρώτη καμπύλη στο σχήμα 6) και ονομάζεται αναλόγως (*trifolium* ή *three-leaved clover ή three-leaved rose* [9]). Από αυτή την αλγεβρική έκφραση των εξισώσεων, γίνεται αντιληπτό, ότι αν συνεχιστεί η αναζήτηση λύσεων για άλλες σχέσεις ταχυτήτων οι τριγωνομετρικοί τύποι καθίστανται πολύπλοκοι. Εδώ λοιπόν αρχίζει να τίθεται εντονότερα η αναγκαιότητα έκφρασης των εξισώσεων σε κάτι λειτουργικότερο (πολικές) αν και όλα τα συστήματα συντεταγμένων έχουν μη ταυτιζόμενα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα.



Σχήμα 6 : Για σχέση -1:2 έχω 3 βρόγχους , για -1:3 έχω 4, κ.ο.κ. Επάγεται η εικασία ότι για -1:ν έχω ν+1 βρόγχους.

Πράγματι, αν στην (6) αντικαταστήσω κατά την προβλεπόμενη θεωρία *x=rσυνθ* , *y=rσυνθ*, θα έχω:

$$r^4 = r^3\sigma\upsilon\nu^3\theta - 3r^3\eta\mu^2\theta\sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow r = \sigma\upsilon\nu^3\theta - 3\eta\mu^2\theta\sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow r = 4\sigma\upsilon\nu^3\theta - 3\sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow \boxed{r = \sigma\upsilon\nu 3\theta} \quad (7)$$

η οποία είναι όντως μια απλή μορφή εξίσωσης. Η (7) μπορεί να προκύψει και από τις παραμετρικές (**) που παίρνουν την μορφή

$$\begin{cases} x = \sigma\upsilon\nu\dfrac{3\alpha}{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{\alpha}{2} = r\sigma\upsilon\nu\theta \\ y = \sigma\upsilon\nu\dfrac{3\alpha}{2}\eta\mu\dfrac{\alpha}{2} = r\eta\mu\theta \end{cases}$$

απ΄ όπου με ύψωση στο τετράγωνο και πρόσθεση κατά μέλη εκάστης, λαμβάνομε $r^2 = \sigma\upsilon\nu^2\dfrac{3\alpha}{2}$ και $\varepsilon\varphi\theta = \dfrac{y}{x} = \varepsilon\varphi\dfrac{\alpha}{2} \Rightarrow \theta = \dfrac{\alpha}{2}$ απ΄ όπου προκύπτει και η (7). Βεβαίως, η πρωτογενής αναζήτηση της εξίσωσης σε πολικές μπορεί να προκύψει ακόμα πιο απλά, αρκεί από το σχήμα 5 να παρατηρήσουμε ότι (ΟΜ)=ρσυν(3θ/2) και με την προϋπόθεση ότι ρ=1 και θ/2=φ να έχω τελικά *r=συν3φ,* ισοδύναμη με την (7). Σχεδιάζοντας σχέσεις ταχυτήτων -1:ν με ν=2(1)9 , λαμβάνω τις εικόνες (σχήμα 6) όπου εικάζω και για τις συμμετρίες, περιοδικότητες και βρόγχους πειραματικά.

Συμπεράσματα και επεκτάσεις:

(α) Επιμείναμε ουσιαστικά σε ένα παράδειγμα, για να διαφανούν εναργέστερα οι μαθηματικές μέθοδοι προσέγγισης ενός θέματος οριοθετώντας συνάμα και κάποια όρια προσέγγισης της μελέτης ανάμεσα σε Ευκλείδεια προσέγγιση, με Αναλυτική Γεωμετρία, όπως και με τα συστήματα συντεταγμένων, που δείχνουν τα όριά τους, την εξειδίκευσή τους, όπως και κάποια πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα.

(β) Η «ζώσα» και εν χρόνω παραγωγή των καμπυλών (και όχι στιγμιαία όπως κάνουν άλλα ειδικά σχεδιαστικά προγράμματα) θεωρούμε ότι είναι παιδαγωγικότερη, αφού αναδεικνύει την κίνηση ως παραγωγό του γ.τ. σχήματος με την διαγραφή της τροχιάς του μέσου. Γίνονται έτσι καλύτερα αντιληπτές οι εφαρμογές των γ. τ. στην Μηχανολογία και ειδικότερα σε κάθε είδους μηχανισμό, ξεφεύγοντας λίγο από την παλιά άχρονη προσέγγιση των μαθηματικών, που είναι μια γέφυρα με την Φυσική. (γ) Μέσω της ύπαρξης πολλαπλών αξόνων συμμετρίας των σχημάτων, αναδεικνύεται και μέρος της καλλιτεχνικής διάστασης των μαθηματικών,

μια δυνατότητα την οποία το Sketchpad διαθέτει σε πολλαπλάσιο βαθμό, απ΄ ό,τι διαφαίνεται στην εξεταζόμενη περίπτωση, [7] αφού λ.χ. δεν σχεδιάζει μόνο τροχιές σημείων, αλλά οποιουδήποτε γεωμετρικού αντικειμένου. (δ) Θεωρούμε, ότι η χρήση του συγκεκριμένου παραδείγματος αναδεικνύει υποδειγματικά την αναγκαιότητα μετάβασης στα υπόλοιπα συστήματα συντεταγμένων. Η επόμενη «γραμμική σύνδεση» : *Ευκλείδεια θεώρηση→ Αναλυτικής Γεωμετρίας θεώρηση → παραμετρικές συντεταγμένες → πολικές,* είναι χρήσιμη προς την κατεύθυνση της ολιστικής θεώρησης του μαθητή ως προς την Γεωμετρία. (ε) Η ενασχόληση με τέτοια θέματα, γεννά ιδέες για επέκταση και γενίκευση. Παραδείγματα: Η κίνηση των σημείων γίνεται σε δύο η περισσότερους κύκλους. Κινείται ακτίνα κύκλου περί τον κύκλο, πάνω στην οποία παλινδρομεί σημείο. Αν οι σχέσεις ταχυτήτων είναι π:1 έχω σχεδίαση μιας καρδιάς. Κυλίεται κύκλος επί κύκλου και κάποιο σημείο του διαγράφει την επιτροχοειδή και οριακά την επικυκλοειδή. Κυλίεται κύκλος εντός κύκλου (υποτροχοειδής-υποκυκλοειδής) . Περιστρέφεται σημείο επί κύκλου του οποίου το κέντρο περιστρέφεται επί κύκλου κ.ο.κ. όσες φορές θέλουμε. Οι δυνατότητες συμβαδίζουν με την φαντασία. (στ) Η μαθηματικοποίηση προβλημάτων κίνησης κύκλου επί κύκλου ή υπό κύκλον, ή επ΄ευθείας ή για ό,τι άλλο μπορεί να σκεφθεί κάποιος, δημιουργεί έναν ενδιαφέροντα γόνιμο διάλογο Κινηματικής, Γεωμετρίας, οπτικής αναπαράστασης σε πραγματικό χρόνο, ανατροφοδότησης, διόρθωσης δεδομένων κίνησης, δημιουργίας εικασιών, άμεσων επαληθεύσεών τους, όπως και διαρκών γενικεύσεων. Επομένως η εισαγωγή παρεμφερών δραστηριοτήτων στην Β΄ Λυκείου στα πλαίσια των ΤΠΕ, είναι μια φυσική αναγκαιότητα, στα πλαίσια διεπιστημονικής προσέγγισης (Κινηματική –Γεωμετρία) η οποία πάντα θεωρείται γόνιμη εκπαιδευτικά και παιδαγωγικά, αφού οδηγεί προς την ολιστική θεώρηση της γνώσης.

Βιβλιογραφία-Διαδίκτυο

[1] Συγγραφική Ομάδα: Μαθηματικά Κατεύθυνσης Β΄ Λυκείου, §3.1 Άσκηση 10 Β΄ ομάδας, ΟΕΔΒ. Διατίθεται εδώ: http://ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSGL-B100/491/3190,12935/

[2] Ιγγλέζου Αθανασία: (2014) *Επιστημολογική και Διδακτική Ανάλυση του μαθήματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στην Ελλάδα.* Διπλωματική Εργασία http://www.math.uoa.gr/me/dipl/2013-2014/dipl_Igglezou_Athanasia.pdf

[3] Λύσεις Ασκήσεων Β΄ Λυκείου Κατεύθυνσης (Π.Ι.) Διατίθεται: http://ps.privateschools.gr/3_b_lyk.html Προσπέλαση 02/7/2016

[4] *Σπιράλ του Αρχιμήδη.* Διατίθεται : http://digi-area.com/DifferentialGeometryLibrary/PlaneCurves/Spiral-Of-Archimedes.php

[5] *Καρδιοειδές με βρόγχο*: https://thatsmaths.com/2014/09/25/curves-with-singularities/

[6] *Καμπύλη "limacon"* http://mathworld.wolfram.com/Limacon.html

[7] Steven Chanan: *101 Project Ideas for The Geometer's Sketchpad* Διατίθεται: http://www.dynamicgeometry.com/Documents/GSP4-101Projects.pdf Προσπέλαση 2/7/2016

[8] Παπάς Βαγγέλης. *Η Μέθοδος του Αρχιμήδη.* Διπλωματική εργασία. https://dspace.lib.ntua.gr/dspace2/bitstream/handle/123456789/6727/pappasv_archimedes.pdf?sequence=3

[9] Διατίθεται http://mathworld.wolfram.com/Trifolium.html και , https://en.wikipedia.org/wiki/Quartic_plane_curve#Three-leaved_clover